Leçon 155 : Exponentielle de matrices. Applications.

1 Définition et généralités (Rombaldi, Mneimé-Testard)

1.1 Définitions

- Théorème sur la convergence de séries matricielles
- Définition de exp
- Rayon de convergence

1.2 Des calculs particuliers

- Diagonales, triangulaires
- Décomposition de Dunford

1.3 Premières propriétés

- Continuité
- $\det(A) = e^{Tr(A)}$
- Inverse de e^A
- $e^{PAP^{-1}} = Pe^A P^{-1}$
- Caractérisation de commutativité entre 2 matrices avec l'exponentielle
- Si le polynôme caractéristique de A est scindé, A est diagonalisable ssi A l'est

2 Étude analytique de l'exponentielle (Zavidovique, Rombaldi, Berthelin)

2.1 Injectivité, surjectivité et image

- exp de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $GL_n(\mathbb{R})$ n'est ni surjective ni injective
- Dév 1 : Surjectivité dans le cas complexe
- Image de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
- Homeomorphisme des matrices symétriques etc.
- Application : Connexité de $GL_n(\mathbb{C})$, racine p-ème pour les matrices inversibles dans $GL_n(\mathbb{C})$...

2.2 Chez les équa diffs

- Dérivation de l'exponentielle complexe
- Solution d'équa diff matricielle
- Théorème de stabilité

2.3 Différentiabilité

- Admis : L'application exp est $\mathcal{C}^\infty$
- Différentielle en 0
- Dév 2 : Différentielle de exp en tout point